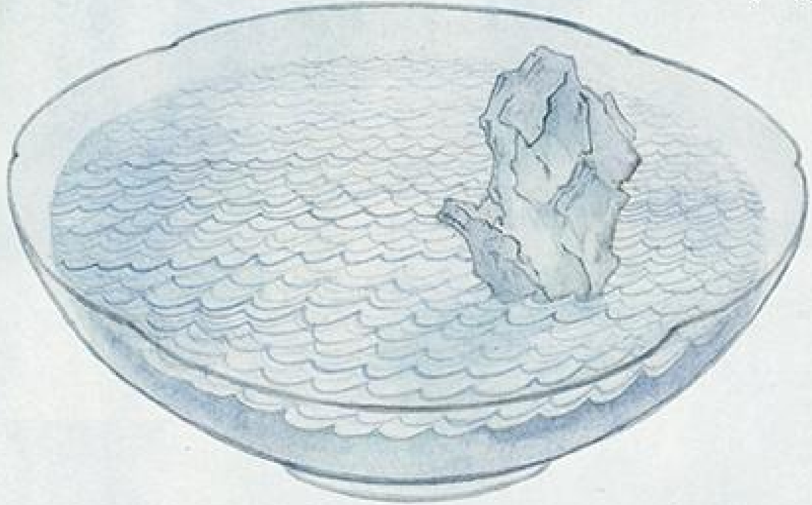
浅谈高等代数中的几何直观教学

温泳铭——闽南师范大学

1. 行列式；
2. 线性方程组解的结构；
3. 施密特正交化.

在抗疫期间，有很多刚上大学的学生在高中阶段都是网课学习，所以这几年学生的基础普遍薄弱，在面对抽象的代数概念时，往往很难形象地理解



法国数学家笛卡尔曾经说过：没有任何东西比几何图形更容易印入脑际了，因此用这种方式来表达事物是非常有益的。

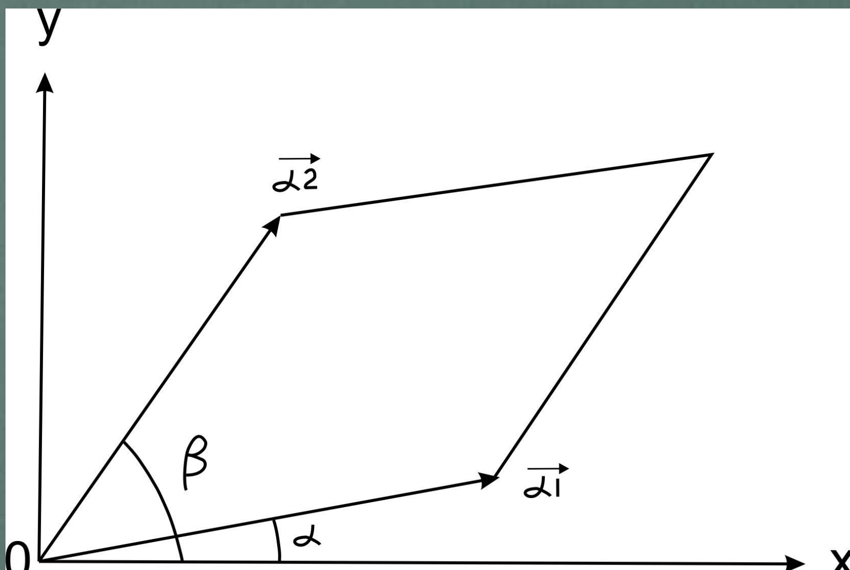
所以，面对抽象的代数观念与代数方法，几何直观就显得尤为重要，借助于几何直观将产生对抽象事物的直接感知。

行列式

- 高等代数的其中一个重要主线是求解线性方程组，在引入二元一次线性方程组和三元一次线性方程组时，提出了二阶、三阶行列式的概念.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei+bfg+cdh-afh-bdi-ceg$$



- 二阶行列式表示以向量 $\overrightarrow{\alpha_1}=(a,b),\overrightarrow{\alpha_2}=(\mathrm{c},d)$ 为邻边的平行四边形的有向面积S，如左图.
推导如下：
$S=|\overrightarrow{\alpha_1}||\overrightarrow{\alpha_2}|\sin<\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2}>$

$$\because \sin < \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2} > = \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha,$$

$$\sin\beta = \frac{d}{|\overrightarrow{\alpha_2}|}, \cos\alpha = \frac{a}{|\overrightarrow{\alpha_1}|}, \cos\beta = \frac{c}{|\overrightarrow{\alpha_2}|}, \sin\alpha = \frac{b}{|\overrightarrow{\alpha_1}|}.$$

$$\therefore S = |\overrightarrow{\alpha_1}||\overrightarrow{\alpha_2}|\sin < \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2} > = \mathrm{ad\text{-}bc}.$$

该几何意义有助于学生理解行列式的性质；例如互换两行改变行列式的符号相当于有向面积反向；行列式某一行乘以k后行列式是原来的k倍，相当于某一边边长为原来的k倍，从而有向面积为原来的k倍等等。

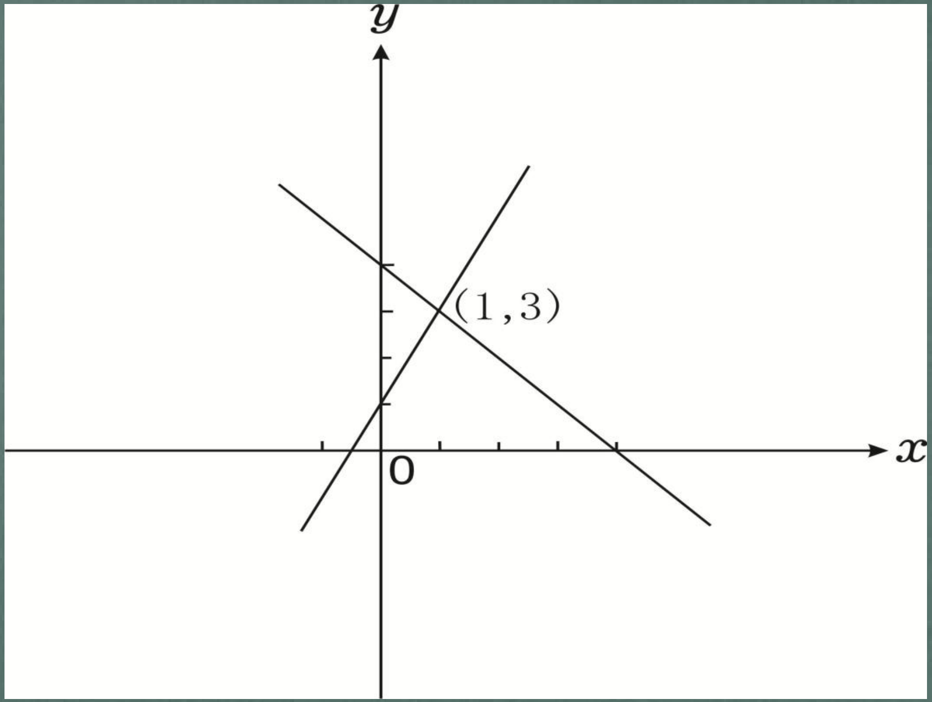
线性方程组解的结构

在线性方程组解的结构教学时发现，学生对于解的结构表示始终觉得难以理解。考虑到学生在初中就已经接触过解线性方程组，学生对于二元一次线性方程组解的结构有一定的认识，在介绍高等代数中解的结构时，可以先从二元一次线性方程组的几何图形进行引导.

例如：

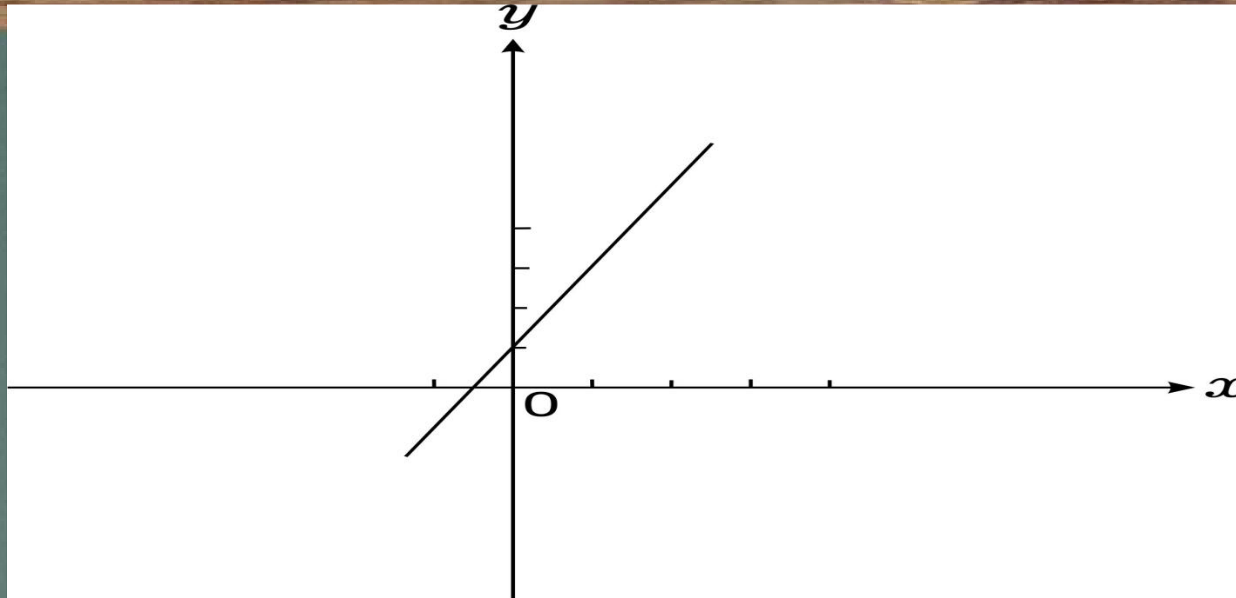
$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+y=4 \end{cases}$$

有唯一解x=1,y=3,其几何意义如下图：



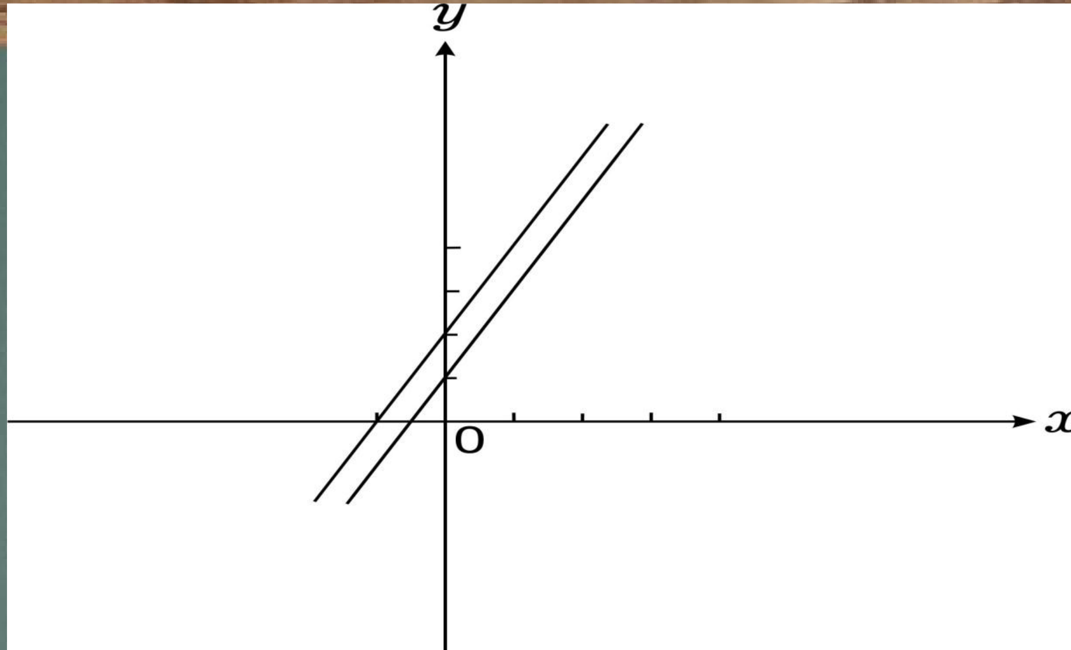
$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 4x-2y=-2 \end{cases}$$

有无穷多解,其几何意义如下图：



$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 4x-2y=-4 \end{cases}$$

无解，其几何意义如下图：



设方程系数矩阵为A，增广矩阵为B. 对于第一个方程，r(A)=r(B)=2，方程有唯一解，体现在图形上是只有一个交点；对于第二个方程，r(A)=r(B)=1<2，方程有无穷多解，体现在图形上是两直线重合，两直线有无穷多交点；对于第三个方程，r(A)≠r(B)，方程无解，体现在图形上是两直线平行无交点.

在中学阶段，是不讨论方程组有无穷多解的情况，由此提出疑问：能不能把无穷多解给表示出来？

(1)先讨论第二个方程组的齐次线性方程组的通解：

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

从几何上看，上述方程组的解实际上就是直线y=2x上的所有点. 取直线y=2x上的任意一个向量，如

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则从几何上看，齐次线性方程组的所有解可表示为：

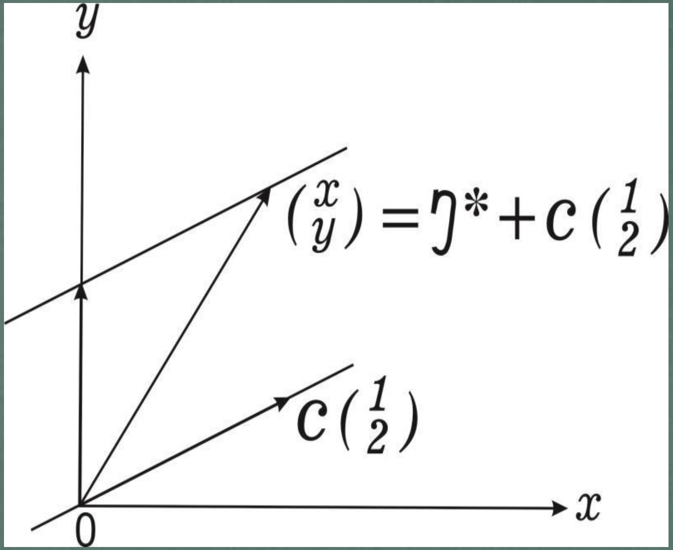
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2)回到第二个方程组解的讨论.几何上看，直线y=2x+1上的点的坐标构成了其解集，其中的一个特解：

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

几何上看，第二个方程组的所有解可以表示为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \eta^* + c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



在以上的认知基础上，可以进一步引导学生思考三元一次线性方程组有无穷解时，解的结构如何？

我们知道，每一个三元一次方程表示空间的一个平面. 几何上看，三元一次线性方程组有唯一解体现为三个平面相交于一点；三元一次线性方程组有无穷多解体现为三个平面相交于一条直线或重合为一个平面；三元一次线性方程组无解体现为三个平面无公共交点.

例：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$$

显然，这个方程有无穷多解. 几何上看该方程是三个平面重合为一个平面：

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

同样先考虑对应齐次线性方程组的解，此时该解对应的是平面上的点. 因此基础解系有两个向量，设为u,v. 根据

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3$$

可求得：

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是齐次方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

再来求该三元一次线性方程组的通解. 显然

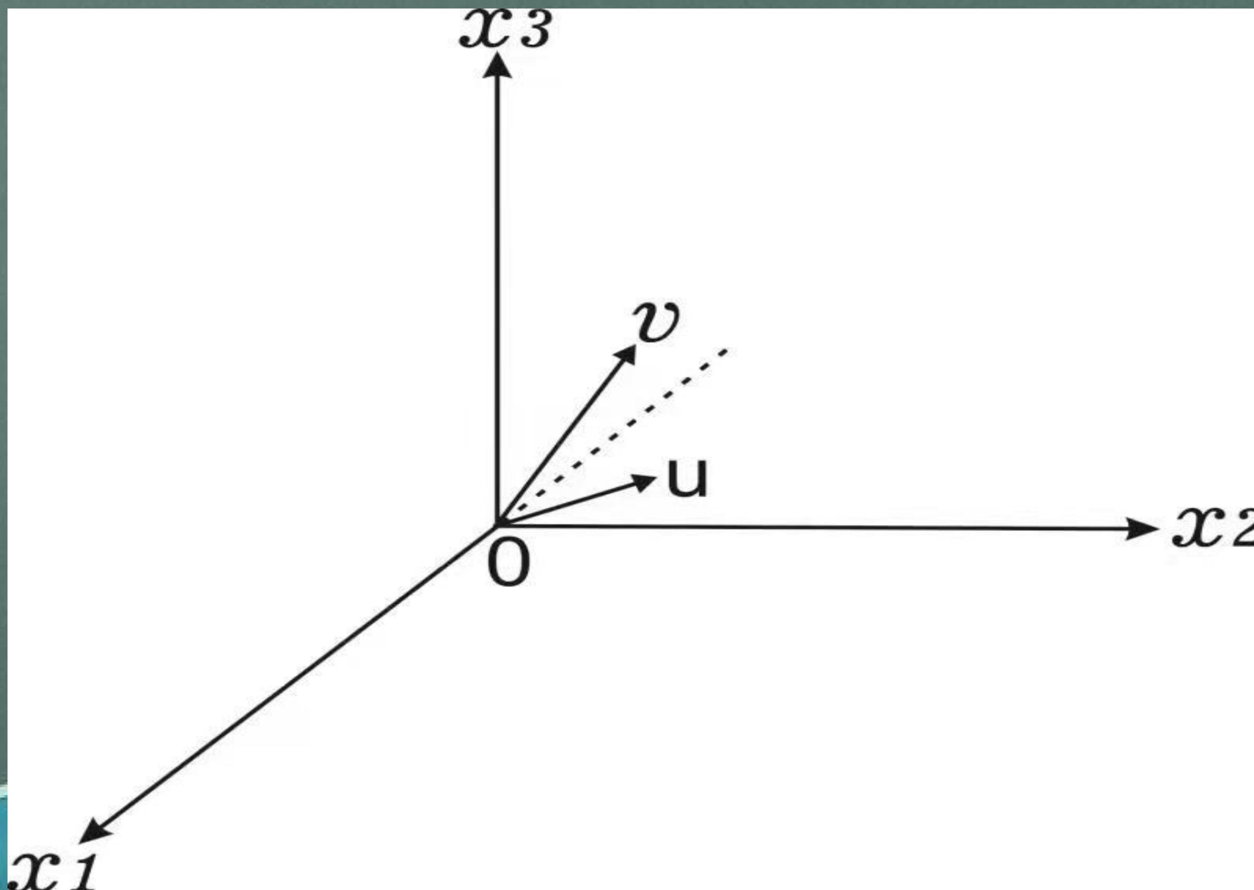
$$\eta^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

为该三元一次线性方程组的特解，从几何直观上看，该三元一次线性方程组的通解是将平面

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

沿着z轴向上平移1/3个单位得到，代数上体现为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \eta^* + c_1 u + c_2 v$$



施密特正交化

施密特正交化过程给出了如何把线性无关的向量组变成两两正交向量组的方法. 具体的说，给定一组线性无关向量：

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$$

经过施密特正交化过程找到的正交向量组设为

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$$

其中 $$\alpha_1 = \varepsilon_1,$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1,$$

$$\alpha_3 = \varepsilon_3 - \frac{(\varepsilon_3, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)}\alpha_2 - \frac{(\varepsilon_3, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1,$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = \varepsilon_n - \frac{(\varepsilon_n, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1 - \frac{(\varepsilon_n, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)}\alpha_2 - \cdots - \frac{(\varepsilon_n, \alpha_{n-1})}{(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-1})}\alpha_{n-1}$$

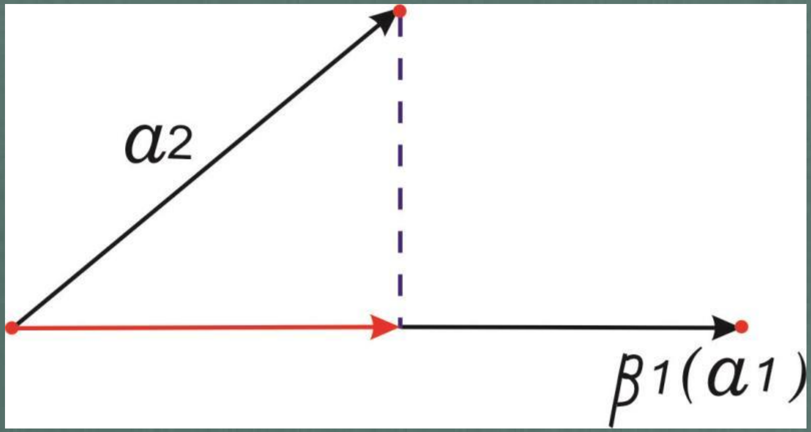
在教学中发现，学生往往死记硬背公式，对这个过程没有一个形象的理解.

所以可在教学中从几何上去表示这一过程。下面分二维和三维情形去分别解释这过程.

设有两个向量 α_1,α_2. 则 α_2 在 α_1 上的投影向量为

$$\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1$$

即为下图中红色部分



则蓝色部分向量为

$$\alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1$$

这个写成施密特正交化过程即为

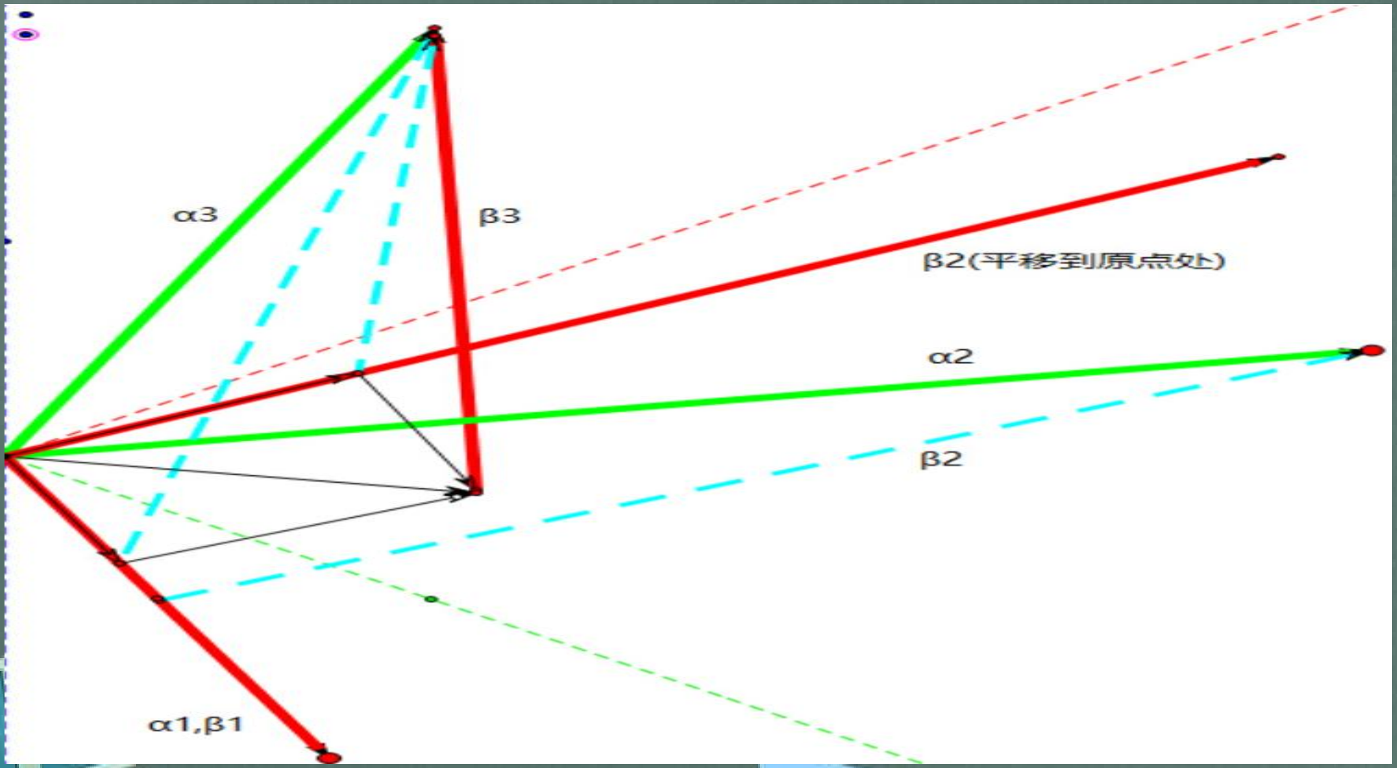
$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1$$

对于三维情形，设有3个向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$如图

则同样α_2在α_1上的投影向量为

$$\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1.$$



记 $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1$，将 β_2 平移到原点，此时 α_3 在 β_1,β_2 上的投影分别为

$$\frac{(\alpha_3,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1,$$

$$\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,$$

从而

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1\text{。}$$

此时，$\beta_1=\alpha_1,\beta_2,\beta_3$ 为得到的正交向量组。

中紋之美

UNVEIL THE BEAUTY
OF CHINESE SYMBOLS

谢谢！

疏影横斜水清浅
暗香浮動月黄昏
林逋《山园小梅》